

ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Ամիր Ռանջբար

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ
ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ
ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՑԱՆՑԻ ԽՏԱՑՄԱՆ ՏԱՐԲԵՐ
ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ա.01.07 «Հաշվողական մաթեմատիկա»
մասնագիտությամբ
ֆիզիկամաթեմատիկական գիտությունների թեկնածուի
գիտական աստիճանի հայցման ատենախոսության

ՍԵՂՄԱԳԻՐ

ԵՐԵՎԱՆ – 2012

YEREVAN STATE UNIVERSITY

Amir Ranjbar

COMPARATIVE ANALYSIS OF ALGEBRAIC MULTIGRID
PRECONDITIONERS FOR DIFFERENT RATES
OF MESH REFINEMENT

AVTOREFERAT

of thesis for requesting the degree of candidate of
physical and mathematical sciences specializing in
01.01.07 «Computational Mathematics»

Yerevan – 2012

Ատենախոսության թեման հաստատվել է Երևանի պետական համալսարանում

Գիտական ղեկավար՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Յու.Ռ. Հակոբյան

Պաշտոնական ընդդիմախոսներ՝ ֆիզ.-մաթ. գիտ. դոկտոր Հ.Ա. Հակոբյան
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու Ա.Գ. Մանուկյան

Առաջատար կազմակերպություն՝ Հայաստանի պետական ճարտարագիտական
համալսարան

Պաշտպանությունը կայանալու է 2012թ. ապրիլի 27-ին, ժ.14³⁰ -ին
ԵՊՀ-ում գործող ԲՈՀ-ի 044 «Մաթեմատիկական կիբեռնետիկա և
մաթեմատիկական տրամաբանություն» մասնագիտական խորհրդի
նիստում հետևյալ հասցեով՝ 0025 Երևան, Ա.Մանուկյան 1:

Ատենախոսությանը կարելի է ծանոթանալ ԵՊՀ-ի գրադարանում:

Սեղմագիրը առաքված է 2012թ. մարտի 26-ին:

Մասնագիտական խորհրդի
գիտական թարտուղար,
ֆիզ.-մաթ. գիտ. թեկնածու

Վ.Ժ. Դումանյան

The topic of the thesis was approved in Yerevan State University

Scientific adviser: doctor of phys.-math. sciences Yu.R. Hakopian

Official reviewers: doctor of phys.-math. sciences H.A. Hakopian
candidate of phys.-math. sciences A.G. Manukyan

Leading organization: State Engineering University of Armenia

Defense of the thesis will be held at the meeting of the specialized council
044 “Mathematical Cybernetics and Mathematical Logic”
in the Yerevan State University on April 27, 2012 at 14³⁰
at the following address: 0025 Yerevan, A.Manoogian st.1.

The thesis is available in the library of YSU.

Avtoreferat was sent on March 26, 2012.

Scientific secretary of the specialized council,
candidate of phys.-math. sciences

V.Zh. Dumanyan

GENERAL CHARACTERIZATION OF THE THESIS

The thesis is devoted to construction and investigation of algebraic multigrid preconditioners for symmetric positive definite matrices which arise in finite element approximation of elliptic equations. The essence of the research consists in carrying out a comparative analysis of different rates of mesh refinement.

Actuality of the Subject. The finite element method is one of the most efficient tools for numerical solution of partial differential equations. A process of solution of a boundary problem for differential equation through the use of the finite element method includes the following principal stages:

- finite element approximation of the problem;
- solution of a system of grid equations.

The finite element approximation of linear differential equations lead to the systems of linear algebraic equations (system of grid equations) of high dimensionality. As a rule, the systems are ill-conditioned. The complexity of the solution of algebraic problems grows rapidly with the problem size which depends on grid step. Therefore using the general numerical methods of linear algebra to solve the system of grid equations is not always expedient. In this connection the development of fast and robust solvers is of great importance.

Algebraic multigrid/multilevel preconditioning methods are widely used nowadays for numerical solution of large-scale linear systems with finite element matrices. These methods are constructed on the base of the sequences of refined meshes. The methods are sufficiently universal and are applicable to a broad class of boundary problems for partial differential equations. The importance of multigrid methods has been greatly increased in connection with development of high productive computers. All that has been said stimulates the working out of multigrid algorithms and their theoretical substantiation.

The Aim of the Thesis. The aim of the work is the development of a technique for constructing algebraic multigrid preconditioners of optimal order of computational complexity for linear elliptic equations. Multigrid technique uses recursive refinement of grids, leading with coarsest grid up to the finest one. However, there can be a significant overhead of data transport and recursive loops associated with many levels of grid refinement. Therefore, it is of interest to construct multigrid methods where fewer refinement levels are used. In different multigrid versions hierarchical grids based on bisection of the sides of mesh cells are usually used. As a distinct of this strategy, in the thesis we develop a multigrid technique based on trisection of the sides of mesh cells. Such a strategy leads to higher rate of mesh refinement.

The following basic problems have been stated:

- development of the methods for constructing algebraic multigrid preconditioners on hierarchical triangular grids based on bisection and trisection of mesh cells;
- obtaining estimates for condition number of preconditioned stiffness matrices which don't depend on the number of refinement levels;
- estimating the computational complexity of a preconditioning step, i.e. obtaining estimates for arithmetical cost of multigrid preconditioners, which are proportional to the dimension of finest-grid problem;
- comparative analysis of bisection and trisection strategies of mesh refinement.

Object of Investigation. Algebraic multigrid preconditioners for symmetric positive definite matrices which arise in finite element approximation of elliptic boundary value problems.

Methods of Investigation. The methods of mathematical analysis, linear algebra, matrix analysis and the theory of the finite element method have been used.

Scientific Innovation. Using general principles to construct algebraic multigrid preconditioners which were developed by O.Axelsson and P.Vassilevski¹, Yu.A.Kuznetsov², Yu.R.Hakopian and Yu.A.Kuznetsov³, in the thesis a new technique for constructing algebraic multigrid preconditioners of optimal order of computational complexity for two-dimensional elliptic equations has been elaborated. The technique is based on hierarchical triangular grids with trisection of the sides of mesh cells. Evaluating computational expenditures, it has been shown that trisection strategy is preferable in comparison with ordinary bisection.

Theoretical and Practical Value. The results obtained in the thesis have theoretical content and at the same time they are directed toward applications. They can be used in development of effective solvers for high-dimensional finite element systems.

Approbation of the Results. The results of the thesis have been presented in 8th International Conference “Computer Science and Information Technologies” CSIT-2011, (September 26-30, 2011, Yerevan, Armenia) and at the general seminar of the Faculty of Informatics and Applied Mathematics, Yerevan State University (January 27, 2012).

Publications. The results of the thesis were published in four scientific articles.

Structure and Volume of the Thesis. The thesis consists of introduction, three chapters, conclusion and the list of references. The number of references is 49. The volume of the work is 86 pages.

THE MAIN CONTENT OF THE THESIS

In the **Introduction** the actuality of the topic is discussed, the aim and the problems of the dissertation are formulated.

In **Chapter 1** the idea of preconditioning and the role of preconditioners in a solution of ill-conditioned systems of linear algebraic equations are discussed. The most important preconditioning techniques are described. In particular, we give a brief review of algebraic multigrid/multilevel preconditioning method and cite some principal results obtained in that field of computational mathematics.

To solve a high-dimensional system of linear algebraic equations

$$Ax = b \quad (1)$$

with symmetric positive definite matrix iterative methods are usually applied. For example, conjugate gradient method or Chebyshev method. It is known that the rate of convergence of an iterative method depends on the *condition number* of the matrix. Remind this notion: *for symmetric positive definite matrices A and B the spectral condition number $\kappa_2(B^{-1}A)$ is defined as the ratio of the largest and the smallest eigenvalues of the matrix $B^{-1}A$.* The number of necessary iterations increases with increasing the condition number. By this very fact, increasing the condition number caused increasing the number of flops and, in the end, increasing the machine time required for solving the system (1).

¹O. Axelsson and P. S. Vassilevski. Algebraic multilevel preconditioning methods. I. - Numer. Math., 56, 1989, 157-177.

²Yu. A. Kuznetsov. Algebraic multigrid domain decomposition methods. - Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v. 4, № 5, 1989, 351-379.

³Yu. R. Hakopian and Yu. A. Kuznetsov. Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids. - Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v. 6, № 6, 1991, 453-483.

To improve the conditionality of the system (1) with ill-conditioned matrix A , instead of that system preconditioned system

$$P^{-1}Ax = P^{-1}b \quad (2)$$

is considered where a symmetric positive definite matrix P is a *preconditioner*. The preconditioner P should meet the following two requirements:

- P1.** The matrix P should good approximate the matrix A , i.e. the condition number $\kappa_2(P^{-1}A)$ should be essentially smaller than $\kappa_2(A)$.
- P2.** A system with matrix P should be easy to solve.

The first property means that the preconditioned iterations should converge rapidly, while the second one ensures that each iteration is not too expensive. It is necessary to strike a balance between the two needs. In connection with the requirements mentioned above, a matrix P will be considered as an *optimal preconditioner* for the matrix A if the following two properties are met:

- OP1.** The matrix P is spectrally equivalent to the matrix A . The latter means that there exist positive constants c_1 and c_2 , independent of the order of the matrix, such that

$$c_1 x^T Px \leq x^T Ax \leq c_2 x^T Px \quad \forall x;$$

in this case

$$\kappa_2(P^{-1}A) \leq c_2 / c_1,$$

and the number of iterations needed to obtain the solution of the preconditioned system (2) with given precision doesn't depend on the order of the system.

- OP2.** The number of arithmetical operations required for solving a system with matrix P is proportional to the number of unknowns.

In **Chapter 2** we construct and analyse a multigrid preconditioner on hierarchical triangular grids with bisection. To attract attention to essential details of multigrid constructions as well as to compare our preconditioners with each other, in the work we carry out all considerations for model elliptic boundary value problem, namely, for Dirichlet problem for Poisson equation in equilateral unit triangle. All the results may be disseminated for second-order self-adjoint elliptic equations using the technique developed in Yu.R.Hakopian and Yu.A.Kuznetsov⁴.

Suppose Δ is an equilateral unit triangle with boundary Γ in the plane of variables $x = (x_1, x_2)$. Denote by $H_0^1(\Delta)$ the subspace of the Sobolev space $H^1(\Delta)$ that consists of the functions vanishing on Γ . Consider a weak formulation of the problem: *for a given function $f \in L_2(\Delta)$ find the function $u \in H_0^1(\Delta)$ such that*

$$\int_{\Delta} \nabla u \nabla w dx = \int_{\Delta} f w dx \quad \forall w \in H_0^1(\Delta). \quad (3)$$

Let τ be a uniform triangulation of the domain Δ formed by equilateral triangular cells (*triangular elements*). With the triangulation τ we associate a grid ω whose nodes are the vertices of the cells. We introduce the following notation:

- N is the set of nodes of the grid ω which belong to the domain Δ ;
- n is the number of nodes in the set N ;
- G is the space of grid functions defined on the set N ;
- V is the space of piecewise linear functions vanishing on the boundary Γ .

⁴Yu. R. Hakopian and Yu. A. Kuznetsov. Algebraic multigrid/substructuring preconditioners on triangular grids. - Sov. J. Numer. Anal. Math. Modelling, v. 6, № 6, 1991, 453-483.

The finite element problem corresponding to the problem (3) is formulated as follows:
find a function $\hat{v} \in V$ such that

$$\int_{\Delta} \nabla \hat{v} \nabla \hat{w} dx = \int_{\Delta} f \hat{w} dx \quad \forall \hat{w} \in V. \quad (4)$$

The problem so defined leads to a system of grid equations

$$Av = g \quad (5)$$

where symmetric positive definite matrix A is such that the relation

$$w^T Au = \int_{\Delta} \nabla \hat{u} \nabla \hat{w} dx \quad \forall u, w \in G \quad (6)$$

holds and a grid function $g \in G$ is determined by the relation

$$w^T g = \int_{\Delta} f \hat{w} dx \quad \forall w \in G \quad (7)$$

(in (6) and (7) the functions $\hat{u}, \hat{w} \in V$ are prolongations of the grid functions $u, w \in G$, correspondingly). Suppose the nodes from the set N are numbered in some order with the integers $1, 2, \dots, n$. Then the entries of the stiffness matrix $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ and the grid function $g = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$ are calculated as follows:

$$a_{ij} = \int_{\Delta} \nabla \phi_i \nabla \phi_j dx, \quad g_i = \int_{\Delta} f \phi_i dx, \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

where ϕ_i are nodal basis functions of the space V . Regarding the spectral condition number $\kappa_2(A)$ of the finite element matrix A , it is generally known that $\kappa_2(A) = O(h^{-2})$ where h is the step size of the uniform grid ω .

In [Section 2.1](#) and [Section 2.2](#) hierarchical triangular grids based on bisection and corresponding finite element matrices are constructed. Let τ_0 be an initial uniform triangulation of the domain Δ , which we consider as the *coarsest* one. Constructing the hierarchical sequence of grids is based on a refinement which is performed by subdividing the triangular cells of the previous triangulation into four congruent ones (Fig.1). In fact, the refinement is carried out by bisection of the sides of triangular cells.

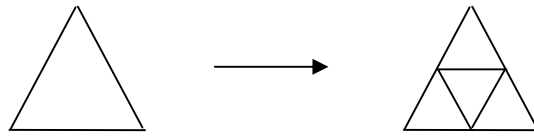


Fig.1 Refining procedure (bisection)

By the refining procedure we obtain triangulations τ_k , $k = 0, 1, \dots, p$, where $p > 1$ is an integer. Let the triangulation τ_k correspond to the k th level of refinement. It is clear that τ_p is the *finest* triangulation. At any level k , where $0 \leq k \leq p$, we will use corresponding notation ω_k, N_k, n_k, G_k and V_k , the significance of which is given above.

The following auxiliary statement holds true.

Lemma 2.1.1⁵ For all values $k = 0, 1, \dots, p$ the estimates

$$4 \leq \frac{n_k}{n_{k-1}} \leq 4 + 8 \cdot 2^{-k}$$

are valid.

⁵ The numbering of the statements is given in accordance with the text of the thesis.

At all levels $k \geq 1$ we will distinguish two kinds of nodes of the grid ω_k , that is, *old nodes* (they are those of the grid ω_{k-1}) and *new nodes*, which appear as a result of the refining procedure. By construction we have

$$N_k \supset N_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, p.$$

Therefore at the k th level the partitioning

$$N_k = N_k^{(1)} \cup N_k^{(2)} \quad (8)$$

can be defined, where

$$N_k^{(1)} = N_k \setminus N_{k-1}, \quad N_k^{(2)} = N_{k-1}$$

(Fig.2). The following ordering of the nodes will be used: the nodes from the set $N_k^{(1)}$ are numbered first in some order and then the nodes from the set $N_k^{(2)}$.

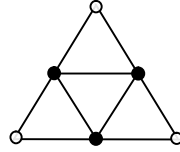


Fig.2 Partitioning the nodes (\circ - old nodes, \bullet - new nodes)

For the values $k = 0, 1, \dots, p$, we define finite element matrices $A^{(k)}$ of the order n_k with help of the relations

$$w^T A^{(k)} u = \int_{\Delta} \nabla \hat{u} \nabla \hat{w} dx \quad \forall u, w \in G_k \quad (9)$$

(see also the relation (6)). For $k = 1, 2, \dots, p$, in accordance with the partitioning (8) of the nodes in the set N_k , the matrices $A^{(k)}$ admit block representation

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N_k^{(1)} \\ \} N_k^{(2)} \end{matrix}. \quad (10)$$

Note, that the block $A_{22}^{(k)}$ in (10) is a nonsingular diagonal matrix. Thus, we have a sequence of finite element matrices

$$A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(p)} \equiv A \quad (11)$$

associated with hierarchical grids ω_k , $0 \leq k \leq p$.

The [Section 2.3](#) is devoted to two-grid preconditioners. This is important intermediate stage to construct multigrid preconditioner.

Consider an equilateral triangle e with vertices numbered 1, 2 and 3. Suppose u and v are arbitrary linear functions defined on e . Insert a bilinear form

$$\varphi_e(u, v) \equiv (u_2 - u_1)(v_2 - v_1) + (u_3 - u_2)(v_3 - v_2) + (u_1 - u_3)(v_1 - v_3) \quad (12)$$

where u_i and v_i are the values of the functions u and v , respectively, at the i th vertex. The following equality holds:

$$\int_e \nabla u \nabla v dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \varphi_e(u, v). \quad (13)$$

Let us write the relation (9) as

$$w^T A^{(k)} u = \sum_{e \in \tau_k} \int_e \nabla \hat{u} \nabla \hat{w} dx.$$

From here, using the equality (13), we find that the matrices $A^{(k)}$ satisfy the relations

$$w^T A^{(k)} u = \frac{\sqrt{3}}{6} \sum_{e \in \tau_k} \varphi_e(\hat{u}, \hat{w}) \quad \forall u, w \in G_k \quad (14)$$

which is essentially used for constructing two-grid preconditioners.

Let $k \geq 1$. Consider a triangular element $e \in \tau_{k-1}$. At the next stage of refining the grid the element e is subdivided into four triangular elements of k th level. As a result, the element $e \in \tau_{k-1}$ turns into a *superelement* (Fig.1). Two-grid preconditioner for the matrix $A^{(k)}$ is constructed as follows. We group the addends in the right-hand side of the relation (14) so that the elements of the k th level form the superelements. After that, eliminating certain links inside the superelements (Fig.3), we obtain a matrix $B^{(k)}$ which has the following block structure:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N_k^{(1)} \\ \} N_k^{(2)} \end{matrix} \quad (15)$$

The blocks $A_{12}^{(k)}, A_{21}^{(k)}$ and $A_{22}^{(k)}$ in (15) are identical with those of the block representation (10) of the matrix $A^{(k)}$ while the block $B_{11}^{(k)}$, as distinct from the block $A_{11}^{(k)}$, is a diagonal matrix.

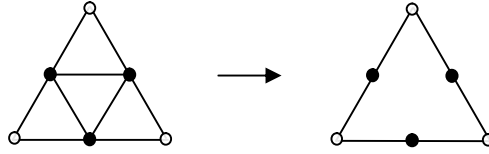


Fig.3 Eliminating links inside the superelement

Then we prove that the matrix $B^{(k)}$ can be also written as

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & \frac{1}{2} A^{(k-1)} + A_{21}^{(k)} B_{11}^{(k-1)-1} A_{12}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Therefore the matrix $B^{(k)}$ is referred to as *two-grid preconditioner* for the matrix $A^{(k)}$. The following statement holds true.

Theorem 2.3.2. *For $k = 1, 2, \dots, p$, the eigenvalues of the matrices $B^{(k)-1} A^{(k)}$ belong to the segment $[1, 5]$.*

The [Section 2.4](#) has auxiliary character. We briefly describe the Chebyshev iterative method and establish a few assertions which are used in constructing a multigrid preconditioner.

In [Section 2.5](#) the multigrid preconditioner based on bisection is constructed. We choose an integer $s \geq 1$ and for the values $k = 1, 2, \dots, p$ successively define matrices

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & \frac{1}{2} R^{(k-1)} + A_{21}^{(k)} B_{11}^{(k-1)-1} A_{12}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (17)$$

where $R^{(0)} = A^{(0)}$ and

$$R^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left[I - \prod_{j=1}^s (I - \theta_j^{(k-1)} M^{(k-1)-1} A^{(k-1)}) \right]^{-1}$$

for $2 \leq k \leq p$ (here I stands for the identity matrix). The parameters $\theta_j^{(k-1)}$ are calculated by the formula

$$\theta_j^{(k-1)} = \frac{2}{(\beta_{k-1} + \alpha_{k-1}) + (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}) t_j^{(s)}}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

where $t_j^{(s)}$ are the roots of the Chebyshev polynomial of the first kind of degree s and $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ is the segment containing the spectrum of the matrix $M^{(k-1)^{-1}}A^{(k-1)}$. In fact, the parameter s is the number of inner Chebyshev iterations on refinement levels. The matrix $M \equiv M^{(p)}$ is considered as a *multigrid preconditioner* for the matrix $A \equiv A^{(p)}$.

An analysis carried out revealed an optimal value $s=3$ of the parameter s . The following statement holds true.

Theorem 2.5.1 *If $s = 3$, then the estimate*

$$\kappa_2(M^{-1}A) \leq 3 + 2\sqrt{5} \quad (18)$$

for the spectral condition number is valid.

Using estimates given in Lemma 2.1.1, the computational complexity of a preconditioning step is estimated. Let A_{ops} be the number of arithmetical operations required for solving a system with matrix M (so-called *the arithmetical cost of the preconditioner*). It is obtained that

$$A_{ops} \leq (79 + 0.03A_{ops}^{(0)})n \quad (19)$$

where $A_{ops}^{(0)} = O(1)$ is the number of arithmetical operations required for solving a system with matrix $A^{(0)}$ and $n \equiv n_p$.

Thus, the multigrid preconditioner constructed can be considered to belong to the class of optimal preconditioners, since it is spectrally equivalent to the initial stiffness matrix and its arithmetical cost is proportional to the dimension of the finest-grid problem.

In **Chapter 3** we construct a multigrid preconditioner on hierarchical triangular grids based on the trisection strategy.

In Section 3.1 hierarchical triangular grids with trisection are constructed. Let τ_0 be an initial uniform triangulation of the domain Δ . Consider now mesh refining procedure which is performed by trisection of the sides of triangular cells (Fig.4).

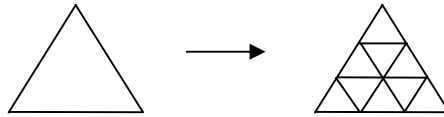


Fig.4 Refining procedure (trisection)

Let us confine ourselves to some integer $p > 1$. By the refining procedure we obtain a sequence of triangulations $\tau_k, k = 0, 1, \dots, p$; here τ_0 is the *coarsest* triangulation while the triangulation τ_p is the *finest* one. As in Section 2.1, we will use notation ω_k, N_k, n_k, G_k and V_k , the significance of which is given above.

The following auxiliary statement holds true.

Lemma 3.1.1 *For all values $k = 0, 1, \dots, p$ the estimates*

$$9 \leq \frac{n_k}{n_{k-1}} \leq 9 + 28 \cdot 3^{-k}$$

are valid.

Consider a triangular element $e \in \tau_{k-1}$. At the next stage of refining the grid the element e is subdivided into nine triangular elements of the k th level. As a result, the element $e \in \tau_{k-1}$ turns into a *superelement* (Fig.4).

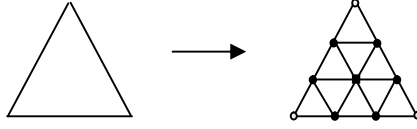


Fig.5 Partitioning the nodes in the set N_k

At all refinement levels $k \geq 1$ we will distinguish two kinds of nodes of the grid ω_k : *old nodes* (they are those of the grid ω_{k-1}) and *new nodes*, which appear as a result of the refining procedure. In its turn, the set of new nodes is subdivided into two subsets. More specifically, we define a partitioning

$$N_k = N_k^{(1)} \cup N_k^{(2)} \cup N_k^{(3)} \quad (20)$$

of the nodes in the set N_k , where $N_k^{(1)}$ is the set of the centers of the superelements (Fig.5, node marked with ■), $N_k^{(2)}$ is the set of new nodes located on the edges of the superelements (Fig.5, nodes marked with ●) and $N_k^{(3)}$ is the set of the vertices of the superelements (Fig.5, nodes marked with ○). The following ordering of the nodes will be used: the nodes from $N_k^{(1)}$ are numbered first in some order, then the nodes from $N_k^{(2)}$ and, finally, the nodes from $N_k^{(3)}$; even more, for the sake of convenience, we suppose that the nodes from the set $N_k^{(2)}$ which are located on the same edge of the superelement are numbered in consecutive order.

In [Section 3.2](#) the finite element matrices associated with hierarchical sequence of triangular grids are defined. For the values $k = 0, 1, \dots, p$ we define finite element matrices $A^{(k)}$ of order n_k with help of the relations

$$w^T A^{(k)} u = \int_{\Delta} \nabla \hat{u} \nabla \hat{w} dx \quad \forall u, w \in G_k. \quad (21)$$

If we write the last relation as

$$w^T A^{(k)} u = \sum_{e \in \tau_k} \int_e \nabla \hat{u} \nabla \hat{w} dx,$$

then, using the equality (13), we arrive at the relations

$$w^T A^{(k)} u = \frac{\sqrt{3}}{6} \sum_{e \in \tau_k} \varphi_e(\hat{u}, \hat{w}) \quad \forall u, w \in G_k. \quad (22)$$

For $k \geq 1$, in accordance with the partitioning (20), the matrices $A^{(k)}$ admit block representation

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & A_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} N_k^{(1)} \\ \} N_k^{(2)} \\ \} N_k^{(3)} \end{matrix}. \quad (23)$$

The blocks $A_{11}^{(k)}$ and $A_{33}^{(k)}$ in (23) are nonsingular diagonal matrices. So, we have a sequence of finite element matrices

$$A^{(0)}, A^{(1)}, \dots, A^{(p)} \equiv A \quad (24)$$

associated with hierarchical grids ω_k , $0 \leq k \leq p$.

In [Section 3.3](#) we construct and analyze two-grid preconditioners. As in bisection case, this is important intermediate stage to construct multigrid preconditioner.

Two-grid preconditioner for the matrix $A^{(k)}$, where $1 \leq k \leq p$, is constructed in the following way. We group the addends in the right-hand side of the relation (22) so that the

elements of the k th level form the superelements. Then, eliminating certain links inside the superelements (Fig.6), we obtain a matrix $\bar{B}^{(k)}$ which has the following block structure:

$$\bar{B}^{(k)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{22}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & A_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \} N_k^{(1)} \\ \} N_k^{(2)} \\ \} N_k^{(3)} \end{array} \right\}. \quad (25)$$

Here $B_{22}^{(k)}$ is a block diagonal matrix with nonsingular diagonal blocks of order two. As regards the blocks $A_{23}^{(k)}$, $A_{32}^{(k)}$ and $A_{33}^{(k)}$, they are identical with those of the block representation (23) of the matrix $A^{(k)}$.

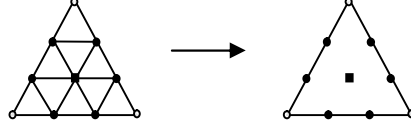


Fig.6 Eliminating links inside the superelement

Further, we define a matrix

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & A_{33}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad (26)$$

which is considered as a preconditioner for the matrix $A^{(k)}$.

Consider the Schur complement of the matrix $\bar{B}^{(k)}$, represented in the block form (25):

$$S_{33}^{(k)} \equiv A_{33}^{(k)} - A_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)-1} A_{23}^{(k)}.$$

We prove the following statement.

Theorem 3.3.1 *For all values $k = 1, 2, \dots, p$, the equality*

$$S_{33}^{(k)} = \frac{1}{3} A^{(k-1)}$$

is valid.

Thus, the matrix $B^{(k)}$ from (26) can be written as follows:

$$B^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & \frac{1}{3} A^{(k-1)} + A_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)-1} A_{23}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Therefore the matrix $B^{(k)}$ is referred to as *two-grid preconditioner* for the matrix $A^{(k)}$. The following important statement holds true.

Theorem 3.3.2 *For $k = 1, 2, \dots, p$, the eigenvalues of the matrices $B^{(k)-1} A^{(k)}$ belong to the segment $[1, 5 + 2\sqrt{2}]$.*

As a simple consequence of the Theorem 3.3.2, we obtain the following estimate.

$$\kappa_2(B^{(k)-1} A^{(k)}) \leq 5 + 2\sqrt{2}. \quad (28)$$

In [Section 3.4](#) the multigrid preconditioner based on trisection is constructed.

Let us choose an integer $s \geq 1$ and for the values $k = 1, 2, \dots, p$ successively define matrices

$$M^{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & 0 \\ A_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} + A_{21}^{(k)} A_{11}^{(k)-1} A_{12}^{(k)} & A_{23}^{(k)} \\ 0 & A_{32}^{(k)} & \frac{1}{3} R^{(k-1)} + A_{32}^{(k)} B_{22}^{(k)-1} A_{23}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

where $R^{(0)} = A^{(0)}$ and

$$R^{(k-1)} = A^{(k-1)} \left[I - \prod_{j=1}^s (I - \theta_j^{(k-1)} M^{(k-1)-1} A^{(k-1)}) \right]^{-1}$$

for $2 \leq k \leq p$ (here I stands for the identity matrix). The parameters $\theta_j^{(k-1)}$ are calculated as follows:

$$\theta_j^{(k-1)} = \frac{2}{(\beta_{k-1} + \alpha_{k-1}) + (\beta_{k-1} - \alpha_{k-1}) t_j^{(s)}}, \quad i = 1, 2, \dots, s,$$

where $t_j^{(s)}$ are the roots of the Chebyshev polynomial of the first kind of degree s and $[\alpha_{k-1}, \beta_{k-1}]$ is the segment containing the spectrum of the matrix $M^{(k-1)-1} A^{(k-1)}$. The matrix $M \equiv M^{(p)}$ is considered as a *multigrid preconditioner* for the matrix $A \equiv A^{(p)}$.

An analysis carried out has shown that we may take only the values $s \geq 3$. We arrive at the following assertion.

Theorem 3.4.1 *If $s \geq 3$ then the estimate*

$$\kappa_2(M^{-1}A) \leq c_*(s) \quad (30)$$

for the spectral condition number of matrix $M^{-1}A$, where $c_(s)$ is the unique positive root of the equation*

$$x = (5 + 2\sqrt{2}) \left[\frac{(\sqrt{x} + 1)^s + (\sqrt{x} - 1)^s}{(\sqrt{x} + 1)^s - (\sqrt{x} - 1)^s} \right]^2, \quad (31)$$

holds true.

In [Section 3.5](#) we find the upper bound for the number s which is, as a matter of fact, the number of the inner Chebyshev iterations. To this end, we estimate the arithmetical cost of the multigrid preconditioner M .

Let A_{ops} be the number of arithmetical operations required for solving a system with matrix M . Using estimates given in Lemma 3.1.1, we have found that s must satisfy the condition $s \leq 8$. So, we have at our disposal the values $3 \leq s \leq 8$. Under this condition we obtain the estimate

$$A_{ops} \leq \left(\frac{1247 + 176s}{99 - 11s} + \frac{s}{595} A_{ops}^{(0)} \right) n \quad (32)$$

where $A_{ops}^{(0)} = O(1)$ is the number of arithmetical operations required for solving a system with matrix $A^{(0)}$ and $n \equiv n_p$.

Thus, our multigrid preconditioner M belongs to the class of optimal preconditioners, since it is spectrally equivalent to the initial stiffness matrix and its arithmetical cost is proportional to the dimension of the finest-grid problem.

In [Section 3.6](#) we specify the quantities $c_*(s)$, subject to the established values of s . After finding the roots of the equations (31), we get the following statement.

Theorem 3.6.1 *The estimate*

$$\kappa_2(M^{-1}A) \leq c_*(s) , \quad (33)$$

where

$$c_*(s) = \begin{cases} 36.66 & \text{for } s = 3 \\ 10.86 & \text{for } s = 4 \\ 8.84 & \text{for } s = 5 \\ 8.24 & \text{for } s = 6 \\ 8.01 & \text{for } s = 7 \\ 7.92 & \text{for } s = 8 \end{cases} , \quad (34)$$

holds true.

Then we ascertain the optimal value of the parameter s from the range $3 \leq s \leq 8$. When applying the most popular preconditioned iterative methods, such as conjugate gradient method or Chebyshev method, as an index of computational efforts required to solve the preconditioned system of grid equations with matrix A on the finest refinement level a quantity

$$W \equiv \sqrt{\kappa(M^{-1}A)} A_{ops} \quad (35)$$

may be taken. According to the Theorem 3.6.1, we consider a quantity

$$W(s) \equiv \sqrt{c_*(s)} A_{ops} \quad (36)$$

where $c_*(s)$ is given in (34) and A_{ops} is estimated in (32). An analysis carried out showed that for $s = 4$ the quantity attains its minimal value

$$W(4) \cong (116.90 + 0.02 A_{ops}^{(0)}) n . \quad (37)$$

Thus, the best choice is $s = 4$.

The [Section 3.7](#) is devoted to the comparison of bisection and trisection mesh refinement strategies.

Suppose we have two hierarchical triangular grids for our domain Δ which are constructed using bisection and trisection rules, as has been described in Sections 2 and 3, correspondingly. Let us assume that the number of nodes at the finest and coarsest levels in both cases is approximately the same. Obviously, that we will have less intermediate refinement levels in trisection case. For trisection case in (37) we have obtained

$$W_{tris} \cong (116.90 + 0.02 A_{ops}^{(0)}) n . \quad (38)$$

For bisection, taking into account the estimates (18) and (19), we get

$$W_{bis} \cong (215.95 + 0.08 A_{ops}^{(0)}) n . \quad (39)$$

On the base of estimates (38) and (39), we conclude that from the point of view of minimization of computational efforts the trisection strategy is preferable.

THE MAIN RESULTS OF THE THESIS

As a consequence of the research carried out in the thesis, the following principal results in the field of preconditioning theory have been obtained.

- Algebraic multigrid preconditioners for symmetric positive definite matrices arising in finite element approximation of two-dimensional elliptic equations are constructed.
- A new technique to construct algebraic multigrid preconditioners with inner Chebyshev iterative procedures on hierarchical triangular grids based on trisection of the sides of mesh cells is developed.
- Estimates for condition number of preconditioned stiffness matrices are derived. The estimates are independent of the number of mesh refinement levels.
- Choosing suitably the number of inner Chebyshev iterations, estimates of optimal order of computational complexity for arithmetical cost of multigrid preconditioners are obtained.
- Evaluating total computational expenditures in conjugate gradient method and Chebyshev iterative method, it was shown that trisection strategy in hierarchical mesh refinement is preferable in comparison with ordinary bisection.

THE LIST OF PUBLICATIONS OF THE AUTHOR

1. **Ranjbar A.** Estimate for the Arithmetical Cost of an Algebraic Multigrid Preconditioner.- In: “*Mathematical Problems of Computer Science*”, v.33, Trans. of the Institute for Informatics and Automation Problems of the National Acad. Sci. of Armenia, Yerevan, 2010, 172-182.
2. **Hakopian Yu. and A. Ranjbar.** Comparison of different rates of mesh refinement in algebraic multigrid preconditioning methods.- In: “*Computer Science and Information Technologies*”, Proceedings of CSIT-2011 International Conference, Yerevan, Armenia, 2011, 73-76.
3. **Hakopian Yu. and A. Ranjbar.** Algebraic Multigrid Preconditioners on Hierarchical Triangular Grids Based on Trisection.- *Applied Mathematical Sciences*, v.5, No.74, 2011, 3661-3682.
4. **Ranjbar A.** An Approach to Construct Algebraic Two-Grid Preconditioners on Hierarchical Triangular Grids.- *The Arabian Journal for Science and Engineering-Mathematics*, v.36, No.8, 2011, 1621-1633.

РЕЗЮМЕ

Амир Ранджбар

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОСЕТОЧНЫХ ПЕРЕОБУСЛАВЛИВАТЕЛЕЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СКОРОСТЕЙ ИЗМЕЛЬЧЕНИЯ СЕТКИ

Диссертационная работа посвящена построению и исследованию алгебраических многосеточных переобуславливателей для симметричных положительно определенных матриц, возникающих при конечноэлементной аппроксимации эллиптических уравнений. Основной упор делается на проведении сравнительного анализа различных скоростей измельчения иерархических сеток.

Конечноэлементная аппроксимация линейных дифференциальных уравнений с частными производными сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений (систем сеточных уравнений) высокого порядка. Как правило, такие системы плохо обусловлены. При этом объем вычислительной работы, требуемый для решения алгебраических задач, быстро растет с увеличением размерности этих задач, которая зависит от шага сетки. Поэтому разработка быстрых и надежных методов решения систем сеточных уравнений является актуальной задачей.

Алгебраические многосеточные/многоуровневые методы переобуславливания активно используются в настоящее время при численном решении алгебраических задач большой размерности. Эти методы применимы к широкому классу задач математической физики и строятся на основе последовательностей измельчающихся сеток. При этом методы становятся все более популярными в связи с развитием высокопроизводительных компьютеров.

Цель настоящей диссертационной работы заключается в разработке методов построения оптимальных алгебраических многосеточных переобуславливателей для линейных эллиптических уравнений. Многосеточная техника использует рекурсивное измельчение сеток, начиная с самой грубой сетки и кончая самой мелкой. Вместе с тем использование большого числа уровней измельчения порождает определенные вычислительные издержки, связанные с рекурсивными циклами и пересылкой данных. Поэтому определенный интерес представляет построение многосеточных алгоритмов, в которых задействовано по возможности меньшее число уровней измельчения сетки.

В различных многосеточных версиях обычно используются иерархические сеточные структуры, основанные на бисекции сторон ячеек сетки. В отличие от такого подхода, в настоящей работе развивается многосеточная техника, основанная на трисекции сторон ячеек сетки. Такая стратегия приводит к более высокой скорости измельчения сеток и, в конечном итоге, к меньшему числу уровней.

В качестве критерия для сравнения двух стратегий измельчения сетки – бисекции и трисекции, рассматривается величина

$$W \equiv \sqrt{\kappa(M^{-1}A)} A_{ops} ,$$

где $\kappa(M^{-1}A)$ есть число обусловленности переобусловленной матрицы жесткости, а A_{ops} – число арифметических операций, требуемых для решения системы с многосеточным переобуславливателем. Показано, что

$$W_{tris} \cong (116.90 + 0.02 A_{ops}^{(0)}) n ,$$

в то время как

$$W_{bis} \cong (215.95 + 0.08 A_{ops}^{(0)})n.$$

Тем самым обосновывается преимущество трисекции.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ

В результате проведенных в работе исследований получены следующие основные результаты в области теории переобуславливания.

- Построены алгебраические многосеточные переобуславливатели для симметричных положительно определенных матриц, возникающих при конечноэлементной аппроксимации двумерных эллиптических уравнений.

- Разработана новая техника построения алгебраических многосеточных переобуславливателей с внутренними чебышевскими итерациями на иерархических треугольных сетках, основанных на трисекции сторон ячеек сетки.

- Получены оценки числа обусловленности переобусловленных матриц жесткости, не зависящие от числа уровней измельчения сетки.

- Выбирая надлежащим образом число внутренних чебышевских итераций, получены оптимальные по порядку оценки арифметической цены многосеточных переобуславливателей.

- Пользуясь полученными оценками общих вычислительных затрат в методе сопряженных градиентов и в чебышевском итерационном методе показано, что иерархическое измельчение сетки на основе трисекции предпочтительнее обычной бисекции.

Ա Մ Փ Ո Փ ՈՒ Մ
Ամիր Ռանջբար

ՀԱՆՐԱՀԱՇՎԱԿԱՆ ԲԱԶՄԱՑԱՆՑԱՅԻՆ
ՎԵՐԱՊԱՅՄԱՆԱՎՈՐԻՉՆԵՐԻ ՀԱՄԵՄԱՏԱԿԱՆ
ՎԵՐԼՈՒԾՈՒԹՅՈՒՆԸ ՑԱՆՅԻ ԽՏԱՑՄԱՆ ՏԱՐԲԵՐ
ԱՐԱԳՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ատենախոսությունը նվիրված է սիմետրիկ դրական որոշյալ վերջավոր տարրային մատրիցների համար հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցման և հետազոտման հարցերին: Հիմնական շեշտը դրվում է ստորակարգային ցանցերի խտացման տարբեր արագությունների համեմատական վերլուծության կատարման վրա:

Մասնական ածանցյալներով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների վերջավոր տարրային մոտարկումը հանգում է բարձր կարգի գծային հանրահաշվական հավասարումների համակարգերի (ցանցային հավասարումների համակարգերի) լուծմանը: Որպես կանոն, այդ համակարգերը վատ են պայմանավորված: Ընդ որում հանրահաշվական խնդիրների լուծման համար պահանջվող հաշվողական աշխատանքի ծավալը այդ խնդիրների չափայնության մեծացման հետ մեկտեղ շատ արագ աճում է: Իսկ խնդիրների չափայնությունը կախված է ցանցի քայլից: Ուստի ցանցային հավասարումների համակարգերի լուծման արագ և հուսալի մեթոդների մշակումը արդիական խնդիր է:

Վերապայմանավորման հանրահաշվական բազմացանցային մեթոդները ներկա ժամանակ լայնորեն օգտագործվում են բարձր չափայնության հանրահաշվական խնդիրները լուծելիս: Մեթոդները կիրառելի են մաթեմատիկական ֆիզիկայի լայն դասի խնդիրների համար և կառուցվում են խտացվող ցանցերի հաջորդականությունների հիման վրա: Ընդ որում այդ մեթոդները դառնում են ավելի ու ավելի հանրամատչելի բարձրարտադրական համակարգիչների զարգացման կապակցությամբ:

Սույն ատենախոսության նպատակը՝ գծային էլիպտական հավասարումների համար օպտիմալ հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցման մեթոդների մշակումն է: Բազմացանցային տեխնիկան օգտագործում է ցանցերի ռեկուրսիվ խտացում՝ սկսած ամենախոշոր ցանցից և վերջացրած ամենամանրով: Դրա հետ մեկտեղ մեծ թվով խտացման մակարդակների օգտագործումը առաջացնում է ռեկուրսիվ ցիկլերի և տվյալների առաքման հետ կապված որոշակի հաշվողական ծախսեր: Ուստի որոշակի հետաքրքրություն է առաջացնում այնպիսի բազմացանցային ալգորիթմների կառուցումը, որտեղ կիրառվում են ըստ հնարավորին փոքր թվով ցանցի խտացման մակարդակներ:

Տարբեր բազմացանցային վերսիաներում սովորաբար օգտագործվում են ստորակարգային ցանցային կառուցվածքներ, որոնք հենվում են ցանցի բջիջների կողմերի երկատման վրա: Ի տարբերություն, սույն աշխատանքում մշակված է ցանցի բջիջների կողմերի եռատման վրա հենված բազմացանցային տեխնիկա:

Այդպիսի ստրատեգիան բերում է ցանցի խտացման ավելի բարձր արագության և վերջին հաշվով՝ ավելի փոքր թվով մակարդակների:

Որպես ցանցի խտացման երկու ստրատեգիաների՝ երկատման և եռատման համեմատության չափանիշ դիտարկվում է

$$W \equiv \sqrt{\kappa(M^{-1}A)} A_{ops}$$

մեծությունը, որտեղ $\kappa(M^{-1}A)$ վերապայմանավորված կոշտության մատրիցի պայմանավորվածության թիվն է, իսկ A_{ops} ՝ բազմացանցային վերապայմանավորիչով համակարգի լուծման համար պահանջվող թվաբանական գործողությունների թիվն է: Ցույց է տրված, որ

$$W_{tris} \cong (116.90 + 0.02 A_{ops}^{(0)})n,$$

այն ժամանակ, երբ

$$W_{bis} \cong (215.95 + 0.08 A_{ops}^{(0)})n.$$

Դրանով հիմնավորվում է եռատման առավելությունը:

ԱՏԵՆԱԽՈՍՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄՆԱԿԱՆ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐԸ

Աշխատանքում կատարված հետազոտությունների արդյունքում ստացված են հետևյալ հիմնական արդյունքներ վերապայմանավորման տեսության բնագավառում:

- Կառուցված են հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչներ սիմետրիկ դրական որոշյալ մատրիցների համար, որոնք առաջանում են երկչափ էլիպտական հավասարումների վերջավոր տարրային մոտարկման ժամանակ:

- Մշակված է ցանցի բջիջների կողմերի եռատման վրա հիմնված ստորակարգային եռանկյուն ցանցերի համար ներքին չեփիշկյան իտերացիաներով հանրահաշվական բազմացանցային վերապայմանավորիչների կառուցման նոր տեխնիկա:

- Ստացված են ցանցի խտացման մակարդակների թվից անկախ վերապայմանավորված կոշտության մատրիցների պայմանավորվածության թվի գնահատականներ:

- Պատշաճ կերպով ընտրելով ներքին չեփիշկյան իտերացիաների թիվը՝ ստացված են բազմացանցային վերապայմանավորիչների թվաբանական գնի ըստ կարգի օպտիմալ գնահատականներ:

- Օգտվելով համալուծ գրադիենտների և չեփիշկյան իտերացիոն մեթոդներում ընդհանուր հաշվողական ծախսերի ստացված գնահատականներից՝ ցույց է տրված, որ եռատման վրա հիմնված ցանցի ստորակարգային խտացումը սովորական երկատումից գերադասելի է: